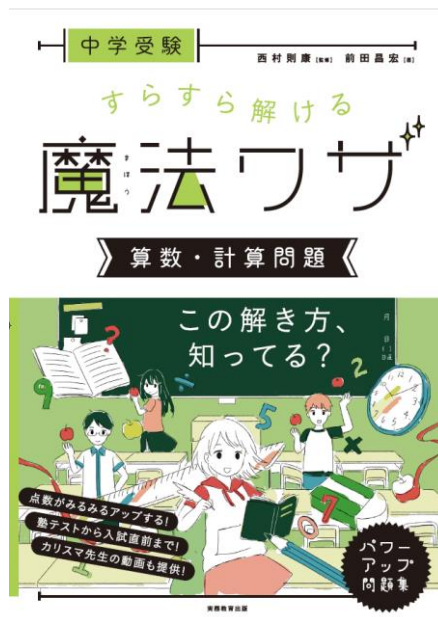



「中学受験 すらすら解ける 魔法ワザ 算数・計算問題」

出版記念キャンペーンプレゼント

本誌に書ききれなかった 魔法ワザ

「約数と倍数の5大パターン プラス裏技3」



「 約数パターン1 基本」

$A \div B = C$ あまり D のとき、「割る数 $B = A - D$ の約数 $>$ 余り D 」です。

【問題】

91 を割ったときの余りが 7 となる整数をすべて求めなさい。

【解答例】

問題文を式に表すと次のようになります。

$$91 \div \square = \bigcirc \text{あまり } 7$$

割る数 $>$ 余りですから、割る数 \square は 8 以上の整数です。

次に上の式をわり算を確かめる式「割られる数 = 割る数 \times 商 + 余り」に直します。

$$91 = \square \times \bigcirc + 7$$

$$\square \times \bigcirc = 84$$

$A \times B = C$ (A 、 B 、 C は整数) のとき、 A 、 B は C の約数、 C は A 、 B の倍数ですから、

求める整数 \square は 84 の約数 (1、2、3、4、6、7、12、14、21、28、42、84) です。

\square は 8 以上の整数ですから、答えは 12、14、21、28、42、84 とわかります。

答え 12、14、21、28、42、84 (順不同可)

「 約数パターン2 不明の同数余り 」

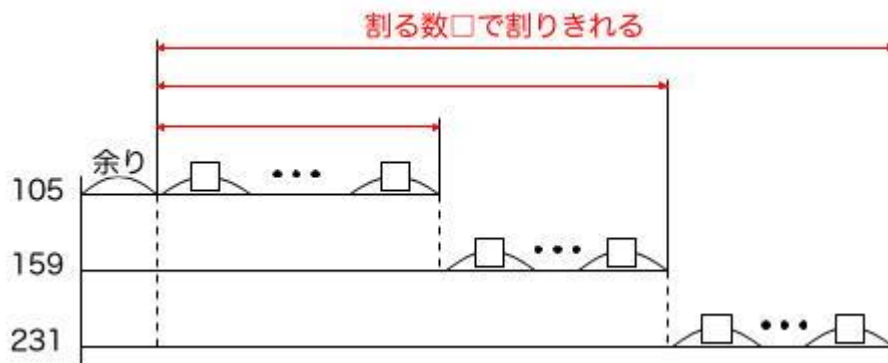
割られた余りが等しいとき、「割る数=割られる数の差の公約数」です。

【問題】

105 を割っても、159 を割っても、231 を割っても余りが同じになる整数を求めなさい。

【解答例】

問題文を線分図に表すと次のようになります。



上の線分図から、 $159 - 105 = 54$ 、 $231 - 159 = 72$ は□で割りきれることがわかりますので、□は54と72の公約数(=最大公約数18の約数1、2、3、6、9、18)の中にあります。3数の中から1つを選んで最大公約数の18で割り、余りを求めます。

$$105 \div 18 = 5 \text{ あまり } 15$$

この結果から、割る数(18の約数)と余り(15の約数)で共通する数で割ると余りが0になることがわかりますから、答えは2、6、9、18です。

答え 2、6、9、18 (順不同可)

「 倍数パターン1 同数余り」

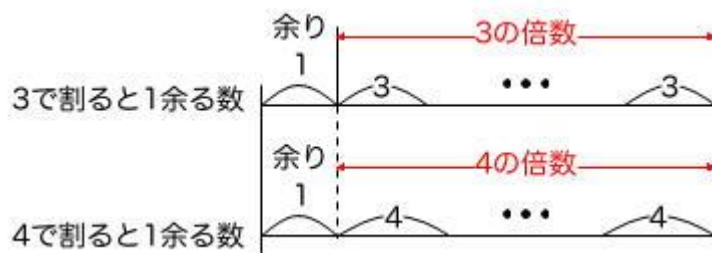
割った余りが等しいとき、「割られる数=割る数の公倍数+余り」です。

【問題】

3で割っても、4で割っても、1余る整数で、100に最も近い整数を求めなさい。

【解答例】

問題文を線分図に表すと次のようになります。



上の線分図から、求める数は「3と4の公倍数(=最小公倍数12の倍数)+1」のうち、

100に最も近い整数とわかります。

$$\text{求める数} = 12 \times \square + 1$$

$$100 \div 12 = 8 \text{ あまり } 4 \quad \text{なので、} \square = 8 \text{ または } 9$$

$$\square = 8 \text{ のとき } 12 \times 8 + 1 = 97$$

$$\square = 9 \text{ のとき } 12 \times 9 + 1 = 109$$

求める数は100に最も近い整数ですから、答えは97です。

「**4** 倍数パターン2 同数不足」

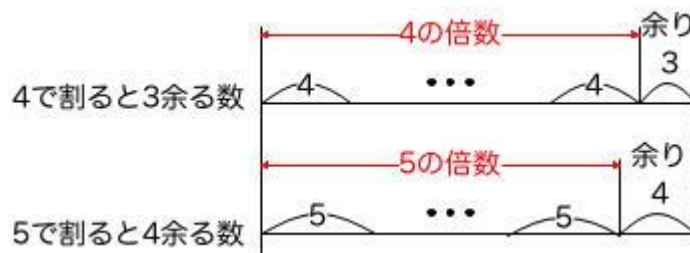
割る数と余りの差が等しいとき、「割られる数=割る数の公倍数-差」です。

【問題】

4で割ると3余り、5で割ると4余る整数で、100に最も近い整数を求めなさい。

【解答例】

問題文を線分図に表すと次のようになります。



上の線分図から、割られる数が割る数と余りの差=1だけ大きいとそれぞれ4、5がもう

1つ入る(=4でも5でも割りきれる)ことがわかります。


$$\text{求める数} + 1 = 4 \text{ と } 5 \text{ の公倍数} = \text{最小公倍数 } 20 \times \square$$

$$100 \div 20 = 5 \quad \text{なので、} \square = 5 \text{ または } 6$$

$$\square = 5 \text{ のとき } \text{求める数} + 1 = 20 \times 5 = 100 \quad \rightarrow \quad \text{求める数} = 99$$

$$\square = 6 \text{ のとき } \text{求める数} + 1 = 20 \times 6 = 120 \quad \rightarrow \quad \text{求める数} = 119$$

求める数は100に最も近い整数ですから、答えは99です。

「 5 倍数パターン3 調べる 」

パターン 1、2 以外するとき、「割られる数=最小+割る数の公倍数」です。

【問題】

6 で割ると 5 余り、8 で割ると 1 余る整数で、100 に最も近い整数を求めなさい。

【解答例】

問題の条件にあてはまる**最小の数を書き出して求めます**。このとき、割る数が大きい方を書き出し、もう一方の条件にあてはまるかどうかをみていくと調べる回数が少なくすみすみます。

6 で割ると 5 余る数 × × ○

8 で割ると 1 余る数 1 9 17

条件にあてはまる最も小さい数 17 のあと、6 で割ると 5 余る数は 6 ずつ、8 で割ると 5 余る数は 8 ずつ増えていきますので、**求める数は 17 に最小公倍数 24 を加えていった数**です。

$100 \div 24 = 4$ あまり 4 なので、 $\square = 3$ または 4

$\square = 3$ のとき 求める数 $= 17 + 24 \times 3 = 89$

$\square = 4$ のとき 求める数 $= 17 + 24 \times 4 = 113$

求める数は 100 に最も近い整数ですから、答えは 89 です。

「裏技1 ○をたすと□で割りきれ、□をたすと○で割りきれる」

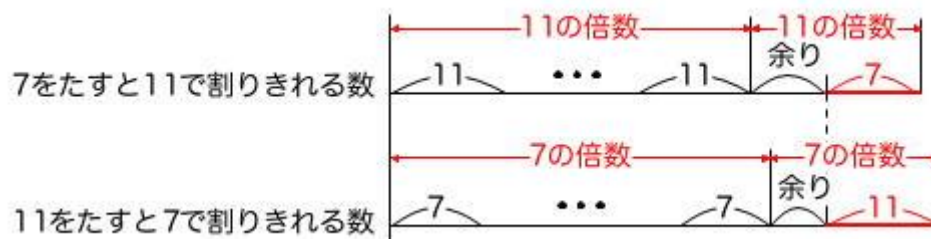
「割られる数=割る数の公倍数- (○+□)」

【問題】

7をたすと11で割りきれ、11をたすと7で割りきれる整数で、1000に最も近い整数を求めなさい。

【解答例】

問題の条件を線分図に表すと次のようになります。



上の線分図で、それぞれに11、7を加えると次のようになります。



ですから、求める数に $7+11=18$ を加えた数は11でも7でも割りきれます。

$$1000 \div 77 = 12 \text{ 残り } 76$$

$$77 \times 13 - 18 = 983 \quad 77 \times 14 - 18 = 1060$$

答え 983

「 裏技 2 約数の個数 」

$$\text{整数 } A^x \times B^y \text{ の約数の個数} = (x + 1) \times (y + 1)$$

【問題】

24 の約数の個数を求めなさい。

【解答例】

24 を素因数分解します。

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3^1$$

このことから次のような表をつくると、24 のすべての約数を表すことができます。

積	$2^0 (=1)$	$2^1 (=2)$	$2^2 (=4)$	$2^3 (=8)$
$3^0 (=1)$	$1 \times 1 = 1$	$2 \times 1 = 2$	$4 \times 1 = 4$	$8 \times 1 = 8$
$3^1 (=3)$	$1 \times 3 = 3$	$2 \times 3 = 6$	$4 \times 3 = 12$	$8 \times 3 = 24$

上の表から、2 の使い方が 0~3 個の 4 通り、3 の使い方が 0 個か 1 個の 2 通りあるので、その組み合わせ方が $4 \times 2 = 8$ 個 のようにして 24 の約数の個数を計算で求められることがわかります。

答え 8 個

「 裏技 3 約数の和 」

$$\text{整数 } A^x \times B^y \text{ の約数の和} = (1 + A + A^2 + \dots + A^x) \times (1 + B + B^2 + \dots + B^y)$$

【問題】

24 の約数の和を求めなさい。

【解答例】

前の裏技でつくった表を利用します。

	2^0	2^1	2^2	2^3	
3^0	1×1	2×1	4×1	8×1	1
3^1	1×3	2×3	4×3	8×3	3

Below the table, a dashed line indicates the width of the shaded area for each row: 1, 2, 4, 8.

上の表から、 1×1 や 2×1 のような約数を求めるかけ算の式が、縦 $1 \times$ 横 1 という正方形や縦 $2 \times$ 横 1 の長方形などの面積を求める式になっています。従って、24 の約数の和は上の図の赤い長方形の面積と等しくなります。

$$\text{縦 } (1+3) \times \text{横 } (1+2+4+8) = 60$$

答え 60